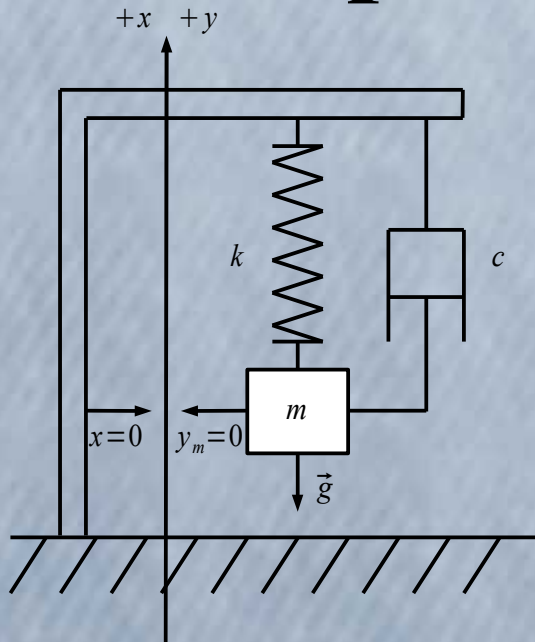


Частотные характеристики и калибровка сейсмометров

Карпинский В.В., ГС РАН, СПбГУ

**Владикавказ
2010**

Уравнение движение простейшего сейсмометра



$x(t)$ — положение основания сейсмометра,
 $y_m(t)$ — положение инертной массы
 сейсмометра, относительно выбранной оси,
 $y(t)=y_m(t)-x(t)$ — перемещение инертной
 массы сейсмометра, относительно
 основания ,
 m — масса маятника,
 k — коэффициент упругости пружины,
 c — затухание, пропорциональное скорости,
 l_0 — длина пружины без нагрузки и в
 отсутствии силы тяжести.

При $t \leq 0$ $x(t) = y_m(t) = 0$ — маятник находится в положении равновесия.

Пусть в момент времени $t = 0$ основание сейсмометра начинает смещаться $x(t)$, тогда инертная масса начинает движение относительно основания сейсмометра.

Сила воздействующая на массу: — $m \ddot{y}$

Препятствующие силы:

сила упругости: $-k(y_m(t) - x(t))$

сила затухания: $-c(\dot{y}_m(t) - \dot{x}(t))$

Согласно 2-му закону Ньютона уравнение движения инертной массы может быть записано в следующем виде:

$$m \ddot{y}_m(t) + c(\dot{y}_m(t) - \dot{x}(t)) + k(y_m(t) - x(t)) = 0$$

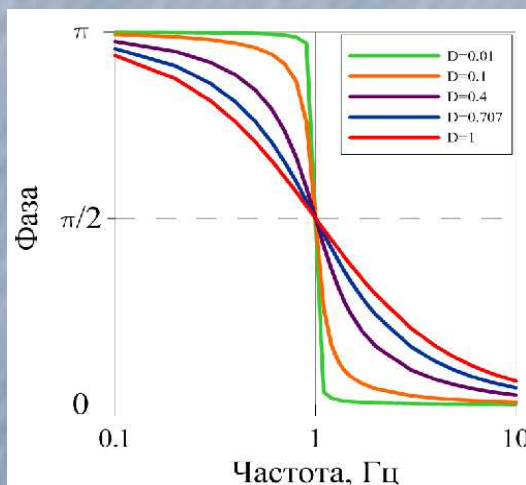
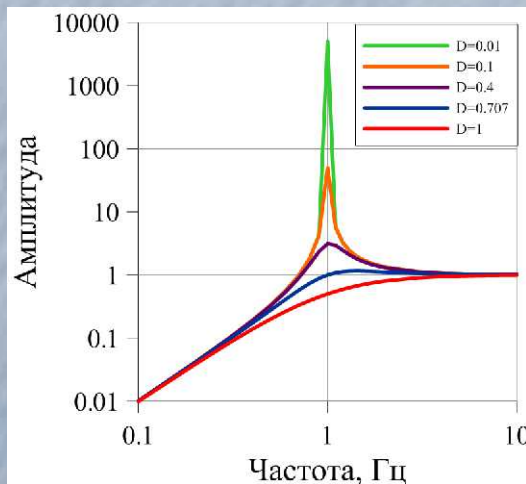
Введём обозначения:

$$2D = c\omega_0/m, \quad \omega_0^2 = k/m$$

Уравнение движения сейсмометра:

$$\ddot{y}(t) + 2D\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = -\ddot{x}(t)$$

Классическое (Фурье) решение уравнения сейсмометра



Положим, что основание сейсмометра движется по гармоническому закону с частотой ω : $x(t) = A_i e^{j\omega t}$
тогда:

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A_i e^{j\omega t}, \quad y(t) = A_0 e^{j\omega t}, \quad \dot{y}(t) = j\omega A_0 e^{j\omega t}, \quad \ddot{y}(t) = -\omega^2 A_0 e^{j\omega t}$$

Уравнение движения можно переписать так:

$$-\omega A_0 + 2\beta j\omega A_0 + \omega_0^2 A_0 = \omega^2 A_i$$

Определим затухание, как $D = \beta/\omega_0$, тогда частотная характеристика примет вид:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{A_0}{A_i} = \frac{\omega^2}{-\omega^2 + j2\beta\omega + \omega_0^2}$$

Модуль этой частотной характеристики называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ):

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega_0^2/\omega^2)^2 + 4D^2\omega_0^2/\omega^2}}$$

Фаза частотной характеристики называется фазово-частотной характеристикой (ФЧХ):

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{-2D\omega/\omega_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2}$$

Решение уравнения сейсмометра с помощью преобразования Лапласа

Если $X(s)$ и $Y(s)$ есть преобразование Лапласа от функций $x(t)$ и $y(t)$, то применив преобразование Лапласа к уравнению сейсмометра, получим:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 2D[sY(s) - y(0)] + \omega_0^2 Y(s) = -[s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)]$$

Если предположить, что в момент времени $t=0$ основание сейсмометра и инертная масса находятся в положении равновесия, т. е. $x(0)$ и $y(0)$ а также их производные равны 0, то частотная характеристика может быть записана в виде.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = -\frac{s^2}{s^2 + 2Ds + \omega_0^2} = -\frac{(s-0)(s-0)}{[s + \omega_0(D + j\sqrt{1-D^2})][s + \omega_0(D - j\sqrt{1-D^2})]}$$

В общем случае можно написать:

$$H(s) = -K \cdot \frac{(s-n_1)(s-n_2)\dots(s-n_k)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_l)}$$

Где K — масштабный коэффициент, $n_1, n_2, \dots, n_k$ — нули передаточной функции, а $p_1, p_2, \dots, p_l$ — её полюса. Масштабный коэффициент K , нули и полюса полностью определяют частотную характеристику системы.

Нули и полюса

Для простейшего сейсмометра:

$$H(s) = -K \cdot \frac{(s - n_1)(s - n_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

Где полюса:

$$p_1 = -\omega_0(D + j\sqrt{1-D^2}) = -\frac{2\pi}{T_s}(D + j\sqrt{1-D^2}) \quad \text{и} \quad p_2 = -\omega_0(D - j\sqrt{1-D^2}) = -\frac{2\pi}{T_s}(D - j\sqrt{1-D^2})$$

А нули равны нулю: $n_1 = n_2 = 0$

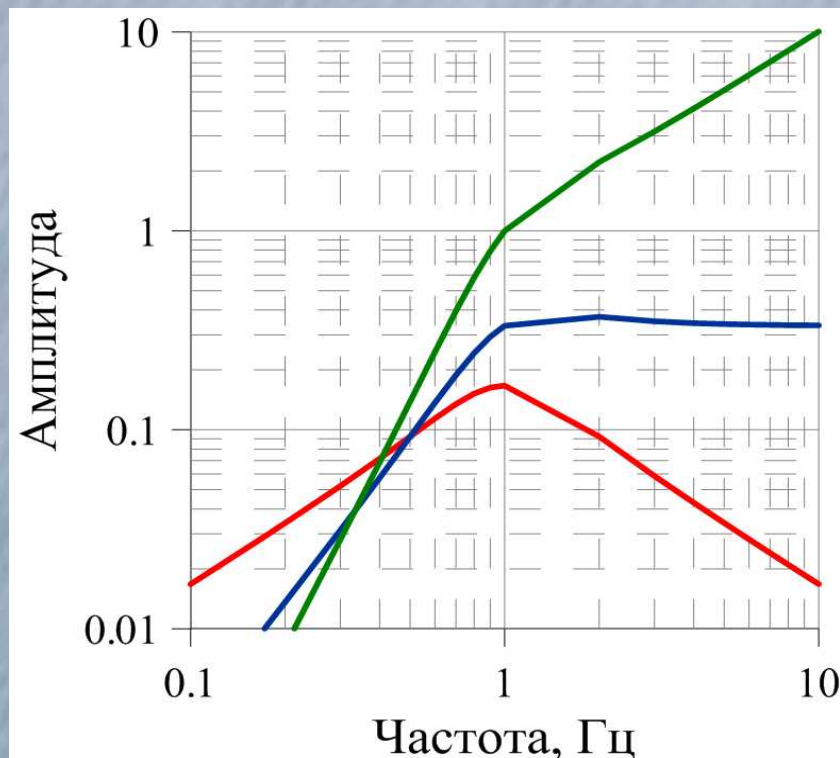
Зная, что преобразования Лапласа производной от функции $y'(t)$ есть $sY(t)$ можно записать частотную характеристику для сейсмометра, у которого сигнал на выходе пропорционален скорости:

$$H_x = \frac{sY(s)}{X(s)} = -K_1 \frac{s^3}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

H_x — частотная характеристика сейсмометра со скоростным преобразователем для пересчёта в смещение.

$H_v = H_x / s$ — частотная характеристика сейсмометра со скоростным преобразователем для пересчёта в скорость.

$H_a = H_x / s^2$ — частотная характеристика сейсмометра со скоростным преобразователем для пересчёта в ускорение.

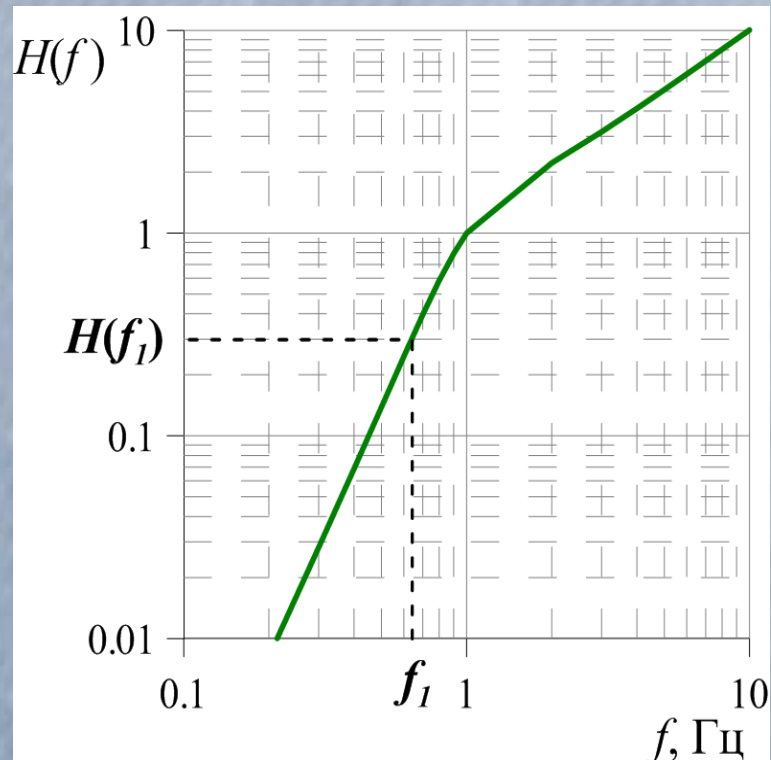


Использование АЧХ

$$|H(f)| = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

$X(f)$ — входной сигнал (амплитуда движение основания сейсмометра, измеряется в метрах)

$Y(f)$ — выходной сигнал (амплитуда на записи, измеряется в отсчётах)



Для того чтобы восстановить искомый сигнал (движение основания сейсмометра) на некоторой конкретной частоте f_1 , надо зарегистрированный сигнал $Y(f_1)$ разделить на значение АЧХ на этой частоте (увеличение) $|H(f_1)|$

$$X(f_1) = \frac{Y(f_1)}{|H(f_1)|}$$

Представление АЧХ в виде FAP-файлов

АЧХ сейсмометра без обратных связей, например СМ-3КВ, работающего в комплекте с сейсмической станцией УГРА выглядит так:

$$|H(f)| = \frac{2\pi f S_{sg} K_{adc}}{\sqrt{(1 - f_0^2/f^2)^2 + 4D^2 f_0^2/f^2}}$$

Зная затухание D , собственную частоту сейсмометра $f_0 = 1/T_s$, чувствительность рабочей катушки сейсмометра S_{sg} и коэффициент преобразования станции K_{adc} можно рассчитать АЧХ для набора частот f .

В программе WSG вместо $|H(f)|$ для ускорения вычислений и устранения потенциальной ошибки при делении на 0, используется функция:

$$h(f) = \frac{10^6}{|H(f)|} = \frac{10^6 \cdot \sqrt{(1 - f_0^2/f^2)^2 + 4D^2 f_0^2/f^2}}{2\pi f S_{sg} K_{adc}}$$

Размерность $h(f)$ — мкм / отсчёт

FAP-файл программы WSG выглядит следующим образом:

400		Число строк АЧХ
0.01000000	184.02890469	
0.01023290	171.74690594	$h(f)$
0.01047130	160.28238126	
...	...	Набор частот $f_1, \dots, f_{400}$, для которых произведён расчёт АЧХ

Расчёт нулей-полюсов

Для сейсмометра без обратных связей, например СМ-3КВ и станции UGRA:

$$H(s) = -K_{adc} \cdot S_{sg} \cdot \frac{s^3}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

Т.е. мы имеем 2 известных коэффициента S_{sg} и K_{adc} , 3 нулевых нуля и 2 полюса, для вычисления которых необходимо знать собственный период T_s и затухание D :

$$p_1 = -\frac{2\pi D}{T_s} + j \frac{2\pi \sqrt{1-D^2}}{T_s},$$

$$p_2 = -\frac{2\pi D}{T_s} - j \frac{2\pi \sqrt{1-D^2}}{T_s}$$

Для сейсмометра СМ-3В и станции УГРА файл с нулями и полюсами в формате SAC выглядит так:

```
ZEROS 3
0 0
POLES 2
-2.23214 -2.14899
-2.23214 2.14899
CONSTANT 19278495
```

Для более сложных систем число нулей и полюсов будет больше, иногда даже значительно больше, например, для сейсмометра STS-2 и станции Quanterra-4124, установленных на с/с «Пулково»:

```
ZEROS 3
POLES 5
-0.0370 -0.0370
-0.0370 0.0370
-251.3300 0.0000
-131.0400 -467.2900
-131.0400 467.2900
CONSTANT 3.616689e+16
```

Определение параметров сейсмометров

1. Момент инерции K_s и приведённая длина l_s . Снимается маятник, вместо шарниров подвесов вставляющийся специальные ножи (см. рис. 1), производится замеры периода свободных колебаний маятника относительно штатной оси (рис. 2) — T_{sm} и смещённой оси (рис. 3) — T'_s . В каждом случае маятник лёгким толчком отклоняется на небольшой угол (~ 10 градусов) и по секундомеру измеряется время t_{100} ста полных колебаний. Периоды определяются по формуле $T_{sm} = t_{100} / 100$. Для расчётов используются следующие формулы:

$$l_s = \frac{g}{4\pi^2} \cdot T_{sm}^2$$

$$l'_s = \frac{g}{4\pi^2} \cdot T'^2_{sm}$$

$$K_s = M \cdot \Delta R_0 \cdot l_s \frac{l'_s - \Delta R_0}{l_s - l'_s + 2 \Delta R_0}$$

Здесь: M — масса маятника с ножами (для СМ-3 — 1,6 кг)
 ΔR_0 — расстояние между лезвиями ножевой опоры (для СМ-3 — 0,02 м).



Рис. 1



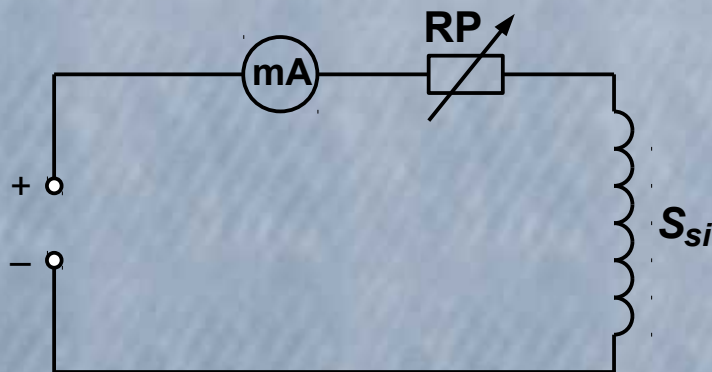
Рис. 2



Рис. 3

Определение параметров сейсмометров

2. **Активное сопротивление катушек сейсмометра** измеряется мостом переменного тока при отсутствии моста — омметром или тестером в режиме омметра. **Сейсмометр должен быть зааретирован..**
3. **Период собственных колебаний сейсмометра T_s** определяется на собранном сейсмометре при разомкнутых катушках. Маятник сейсмометра лёгким толчком выводится из положения равновесия, измеряется время 10 полных колебаний t_{10} , период рассчитывается по формуле $T_s = t_{10} / 10$.
4. **Коэффициент преобразования (чувствительность) рабочей S_{sg} , демпфирующей S_{sd} и калибровочной S_{sk} катушек сейсмометра** определяется следующим образом: катушки по очереди включаются в схему (см. рис.), где **A** — миллиамперметр, **RP** — магазин сопротивлений. В специальное место на маятнике на расстоянии $r_0 = 0,14$ м от оси подвеса маятника помещается груз массой m кг, маятник под влиянием веса груза опускается.

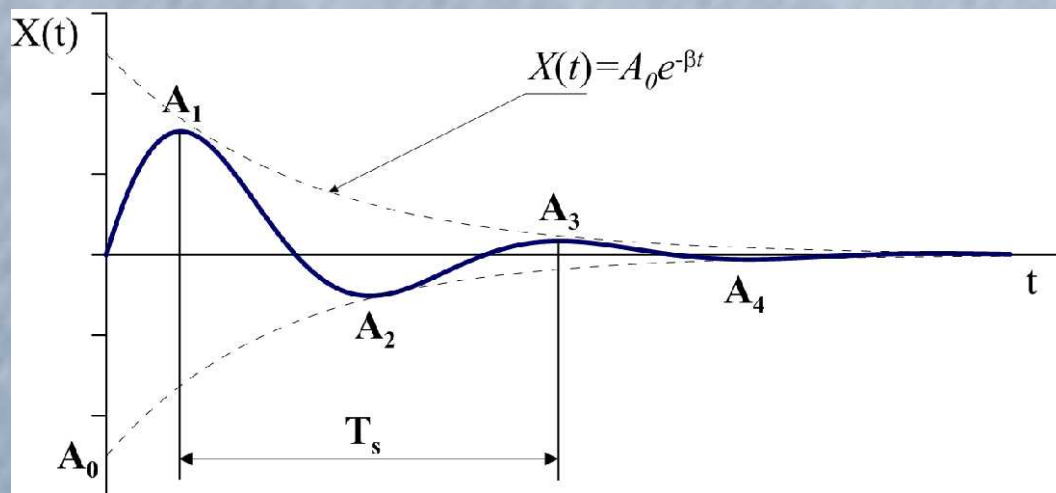


Для возвращения маятника в первоначальное положение в катушку подаётся ток i , регулируемый магазином сопротивлений. Когда горизонтальная световая линия совпадёт с исходным положением, делается отсчёт тока по миллиамперметру. Коэффициент преобразования рассчитывается по формуле:

$$S = \frac{gmr_0}{il_s}$$

Определение параметров сейсмометров

5. **Затухание сейсмометра D** определяется следующим образом: маятник лёгким (!) толчком или слабым электрическим импульсом, поданным в катушку затухания, выводится из положения равновесия и производится запись затухающих колебаний. Далее, измеряются амплитуды колебаний на записи со сдвигам на половину периода свободных колебаний $A_0=A(t_0)$, $A_1=A(t_0+T_s/2)$, ..., $A_n=A(t_0+nT_s/2)$ (см рис.)



Затухание рассчитывается по формуле:

$$D = \frac{\ln(A_n / A_{n+1})}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(A_n / A_{n+1})}}$$

«Правильному» затуханию **$D=0,707$** , соответствует отношение $A_n / A_{n+1} = \mathbf{23}$

Расчёт сопротивления затухания R_d производится по формуле:

$$R_d = \frac{S_{sd}^2 l_s^2}{4\pi K_s f_0} - R_{sd}$$

Определение коэффициента преобразования станции A_{adc}

Для определения коэффициента преобразования станции A_{adc} необходимо подать на вход станции постоянный сигнал, измерить его напряжение вольтметром. Измерить на записи зарегистрированный сигнал и вычислить отношение выходного сигнала к входному. Размерность коэффициента преобразования — отсчёт/Вольт. Для повышения точности желательно провести несколько измерений, меняя полярность входного сигнала и/или его амплитуду, полученные результаты усреднить.

Такое простое определение A_{adc} возможно только в том случае, когда станция не вносит своего вклада в формирование частотной характеристики: отсутствует фильтрация в рабочем диапазоне и т. п. Таким условиям удовлетворяют, например, станция UGRA, станция SDAS (при частоте оцифровки меньше 100 Гц), станция PDAS (при отключённых фильтрах). Если это условие невыполнимо, то необходимо проводить определение коэффициента преобразования станции во всём рабочем диапазоне частот $A_{adc}(f)$.

Генераторный метод калибровки сейсмических каналов

Суть генераторного метода калибровки заключается в осуществлении силового возбуждения, когда возбуждающая сила прикладывается не к основанию сейсмометра, а к подвижной массе. В данном случае мы будем раскачивать массу, подавая синусоидальный ток в калибровочную, а при её отсутствии в демпфирующую катушку сейсмометра (см схему). АЧХ рассчитывается по следующей формуле:

$$|H(f)| = \frac{4\pi^2 AK_s f^2}{S_{sk} l_s^2 i}$$

A — амплитуда сигнала на записи;

K_s — момент инерции маятника;

l_s — приведённая длина маятника;

S_{sk} — чувствительность калибровочной катушки;

i — ток, текущий через калибровочную катушку: $i = U / (R_{sk} + R_r)$

R_{sk} — сопротивление калибровочной катушки;

R_r — балластное сопротивление, обычно выбирается так, чтобы общее сопротивление цепи было не меньше 600 Ом

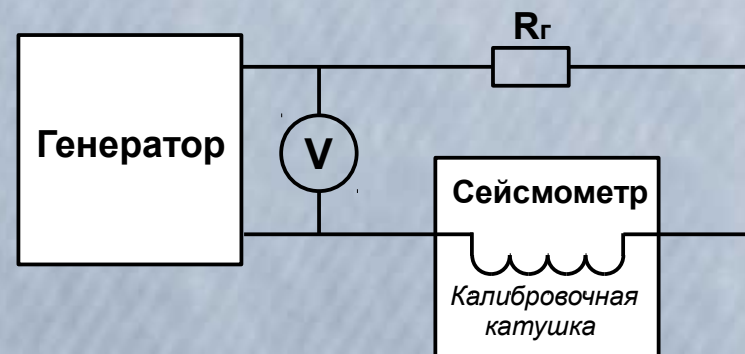


Схема для калибровки сейсмометра генераторным методом, используя калибровочную катушку

Особенности использования генераторного метода при отсутствии калибровочной катушки

В случае отсутствия калибровочной катушки (СМ-3, СМ-3В, С-5-С и др.) или невозможностью её использования (СМ-3ОС), изменится схема подключения (см рисунок) — параллельно катушке затухания, в которую мы будем закачивать сигнал, оказывается подсоединено сопротивление затухания R_d . Общая формула для расчёта АЧХ останется изменится незначительно ($S_{sk} \rightarrow S_{sd}$), но формула для расчёт тока, текущего через катушку, изменится значительно:

$$i = \frac{U \cdot R_d / R_{sd}}{\left(R_{\Gamma} + \frac{R_d R_{sd}}{R_d + R_{sd}} \right) \left(1 + \frac{R_d}{R_{sd}} \right)}$$

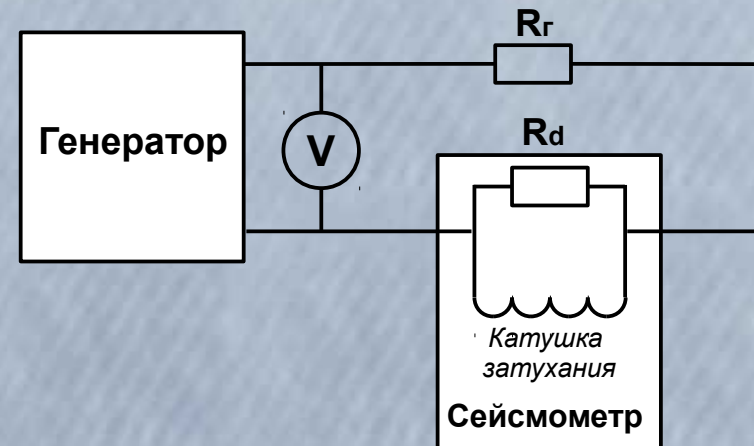


Схема для калибровки сейсмометра генераторным методом, используя катушку затухания

Учёт трансформаторного эффекта при использовании генераторного метода калибровки

Для сейсмометров с совмещенными на общем каркасе катушками, например, у сейсмометров СМ-3 всех модификаций рабочая и демпфирующая катушки совмещены (калибровочная размещена отдельно!) следует учитывать трансформаторный эффект, возникающий вследствие взаимной индукции между обмотками преобразователя. Вклад этого эффекта, в зависимости от используемых катушек, может быть значительным на больших частотах (> 10 Гц). Эффект возникает вследствие индуктивной связи между обмотками: при определении АЧХ генераторным методом на рабочей обмотке сейсмометра происходит сложение двух ЭДС, отличающихся постоянным фазовым сдвигом и переменным отношением амплитуд в функции частоты. Формула для расчёта АЧХ генераторным методом с учётом трансформаторного эффекта выглядит так:

$$|H(f)| = \frac{4\pi^2 AK_s f^2}{S_{sk} l_s^2 i} \cdot \left(1 + \frac{4\pi^2 f^2 L K_s}{S_{sk}^2 l_s^2}\right)$$

Для оценки вклада трансформаторного эффекта рекомендуется оценить на максимальной частоте множитель в скобках. Если его величина не превышает 1,1–1,2, то этим эффектом можно пренебречь, в противном случае расчёт АЧХ производить по приведённой выше формуле.